数理解析研究所講究録
第1833巻 2013年 86-91

LOTSの積の可算メタコンパクト性

神奈川大学 工学部　平田 康史 (Yasushi Hirata)
Faculty of Engineering, Kanagawa University
大分大学 教育福祉科学部　家本 宣幸 (Nobuyuki Kemoto)
Faculty of Education and Welfare Science, Oita University

概 要

順序数の有限積の部分空間は可算メタコンパクトであることが知られている. そして, 順序数はLOTSの特殊な場合であるから, 2つのLOTSの積が可算メタコンパクトであるかどうかを考えるのは自然であろう. 本稿ではこの問題に関して得られた結果などについて述べる.

空間はすべて正則な T_1 空間とする.

1 LOTSとGO-space

$L=(L,<)$ は線形順序集合とする. $C\subseteq L$ は, $a<b$ となる任意の $a,b\in C$ に対して $\{x\in L: a<x<b\}\subseteq C$ となっているとき, L の**凸集合**とよばれる. 例えば, 以下のような区間はどれも凸集合である.

$$(a,\rightarrow)=\{x\in L: a<x\},\quad (\leftarrow,b)=\{x\in L: x<b\},$$

$$(a,b)=\{x\in L: a<x<b\},\quad (a,b]=\{x\in L: a<x\leq b],$$

$$(\leftarrow,b]=\{x\in L: x\leq b\}.$$

線形順序集合 $L=(L,<)$ 上に, **開区間位相**は,

$$\{(a,b): a,b\in L, a<b\}\cup\{(a,\rightarrow): a\in L\}\cup\{(\leftarrow,b): b\in L\}$$

を開基として生成され, **Sorgenfrey 位相**は,

$$\{(a,b]: a,b\in L, a<b\}\cup\{(\leftarrow,b]: b\in L\}$$

を開基として生成される.

開区間位相をもつ線形順序集合は, **LOTS** (=Linearly Ordered Topological Space) とよばれる. また, 線形順序集合に, 凸集合からなる何らかの族を開基とするようなハウスドルフ位相が入っているとき, **GO 空間** (=Generalized Ordered space) とよばれる. Sorgenfrey 位相の入った線形順序集合は, 明らかに GO 空間である.

以下, 順序数は, それより小さい順序数全体の集合と同一視され, 通常の順序に関する LOTS とみなす. 基数は, その濃度をもつ最小の順序数と同一視される. ω は最小の無限順序数 (基数) を表し, 自然数全体の集合と同一視する. ω_1 は最小の非可算順序数 (基数) を表すものとする.

次の事実はよく知られている.

事実 1 (Čeck, see Lutzer [6]). *位相空間 X が GO 空間であるためには, それが LOTS に (閉) 部分位相空間として埋め込めることが必要十分である.*

系 1. *Sorgenfrey 位相をもつ線形順序集合はある LOTS L^* に閉集合として埋め込める.*

特に L が Sorgenfrey 位相をもつ線形順序集合ならば, $L^* = L \times \omega$ に辞書式順序を入れて LOTS とみなせば, $L \times \{0\}$ は L^* の閉部分集合であり, L と同相であることが容易にわかる.

2 LOTS の積の可算メタコンパクト性

空間 X が**可算メタコンパクト** (resp. **可算パラコンパクト**) であるとは, 任意の可算開被覆が点有限 (resp. 局所有限) な開細分をもつことである. よく知られているように, 正規空間においては, 可算パラコンパクト性と可算メタコンパクト性は同値である.

事実 2 (well-known). *GO 空間は正規で可算メタコンパクトである.*

順序数	$\Rightarrow$	順序数の部分空間
$\Downarrow$		$\Downarrow$
LOTS	$\Rightarrow$	GO 空間
		$\Downarrow$
		単調正規空間 (かつ, オーソコンパクト)
		$\Downarrow$
正規	$\Leftarrow$	shrinking
		$\Downarrow$
可算メタコンパクト + サブノーマル	=	可算サブパラコンパクト

順序数の積空間の部分空間と可算メタコンパクト性の関係については次のようなことが知られている.

定理 1 (Kemoto-Smith [3]). 順序数 μ と ν に対して, $\mu \times \nu$ の任意の部分空間は可算メタコンパクトである. 特に, 順序数の任意の部分空間 A, B に対して, $A \times B$ は可算メタコンパクトである.

定理 2 (Kemoto-Smith [4]). 各 $n \in \omega$ に対して, ${\omega_1}^n$ の任意の部分空間は可算メタコンパクトである.

定理 3 (Fleissner [2]). 順序数の有限積の任意の部分空間は可算メタコンパクトである.

可算順序数は距離付け可能であるからその可算積も距離付け可能であり, よって, その任意の部分空間は可算メタコンパクトである. 一方, ω^{ω_1} が可算メタコンパクトでないことはよく知られている.

定理 4 (Kemoto-Smith [4]). ω_1 の部分空間の可算積 $\prod_{n\in\omega} A_n$ で可算メタコンパクトでないようなものが存在する.

定理 1 で述べたように, 順序数の部分空間 A, B については, その積 $A \times B$ は可算メタコンパクトである. そして, 順序数 (の部分空間) は LOTS (GO 空間) であるから, 次のような問題を考えるのは自然であろう.

問題 1. 任意の *LOTS* A, B に対して, $A \times B$ は可算メタコンパクトか?

この問題に対して我々は, 次のような結果を得た.

定理 5 (Main Theorem). *LOTS* A, B で, $A \times B$ が可算メタコンパクトでないものが存在する.

実際, 次のような例があることがわかった.

定理 6. κ を正則非可算基数とすると, パラコンパクトな *LOTS* L_κ^* で, 以下の条件を満たすものが存在する.

- L_κ^* の濃度は $\kappa^{<\kappa}$ で, *character* は κ,
- $\kappa \times L_\kappa^*$ は可算メタコンパクトでない,
- $\mathrm{cf}\,\mu \neq \kappa$ となる任意の順序数 μ に対して $\mu \times L_\kappa^*$ は正規かつ可算メタコンパクトである.

ここで, $\kappa^{<\kappa}$ は $|\bigcup_{\mu<\kappa} {}^{\mu}\kappa|$ のことである.

3 反例 L_κ^*

κ を正則非可算基数として, これを通常の順序に関する LOTS とみなす.

$$\bar{L}_\kappa = {}^{\kappa}[0,\kappa] = \{u |\ u : \kappa \to [0,\kappa] \text{ is a function}\}$$

として, これに辞書式順序を入れる. 各 $\mu < \kappa$ に対して,

$$L_\kappa(\mu) = {}^{\mu}\kappa = \{s |\ s : \mu \to \kappa \text{ is a function}\},$$

と置き, 各 $s \in L_\kappa(\mu)$ に対して, $\bar{s} \in \bar{L}_\kappa$ を次のように定める.

$$\bar{s}(\xi) = \begin{cases} s(\xi) & \text{for each } \xi \in \mu, \\ \kappa & \text{for each } \xi \in \kappa \setminus \mu. \end{cases}$$

$L_\kappa = \bigcup_{\mu<\kappa} L_\kappa(\mu)$ 上に線形順序を, 各 $s_0, s_1 \in L_\kappa$ に対して

$$s_0 \quad {}_{L_\kappa}\, s_1 \Leftrightarrow \overline{s_0} \quad {}_{\bar{L}_\kappa}\, \overline{s_1}$$

となるように定義し, Sorgenfrey 位相を入れる.

ここでは証明は述べないが, この GO 空間 L_κ について, $\kappa \times L_\kappa$ が可算メタコンパクトでないことを示すことが出来る.

先に述べたように, Sorgenfrey 位相をもつこの線形順序集合 L_κ は,

$$L_\kappa^* = L_\kappa \times \omega$$

に辞書式順序を入れた LOTS に閉集合として埋め込むことができる. $\kappa \times L_\kappa^*$ は LOTS の積で, 可算メタコンパクトではないような例になっている.

4 問題

LOTS A, B の積 $A \times B$ で可算メタコンパクトでないものが存在することがわかったが, そのような A, B の濃度はどちらも必ず非可算である.

事実 3. *GO 空間 A, B について, $|A| \leq \omega$ か $|B| \leq \omega$ であれば, $A \times B$ は可算メタコンパクトである.*

一方, 今回見つけた, 可算メタコンパクトではないような LOTS の積の例 $\kappa \times L_\kappa^*$ については, κ は正則非可算基数であるから, 一番小さくとっても $\kappa = \omega_1$ で, そのときの L_κ^* の濃度は $\kappa^{<\kappa} = {\omega_1}^{<\omega_1} = 2^\omega$ であるから, 連続体仮説が成り立てば $|L_\kappa^*| = \omega_1$ であるが, 成り立たなければ $|L_\kappa^*| > \omega_1$ である.

問題 2. $|A| = |B| = \omega_1$ *となるような LOTS (または GO 空間) A, B で, $A \times B$ が可算メタコンパクトでないようなものの存在を ZFC だけから証明できるか?*

また, 今回の例 $\kappa \times L^*_\kappa$ において, L^*_κ はパラコンパクトであるが, κ の方はパラコンパクトではない.

問題 3. *どちらもパラコンパクトであるような LOTS (または GO 空間) A, B の積 $A \times B$ で, 可算メタコンパクトでないものは存在するか?*

尚, そのような例が存在するとしても, A, B はいずれも順序数の部分空間ではありえない.

事実 4. *A が順序数のパラコンパクトな部分空間で, B が単調正規空間 (例えば GO 空間) であれば, $A \times B$ は可算メタコンパクトである.*

$\mathbb{I} = [0,1]$ を実数直線における単位閉区間とする.

定理 7 (Dowker, see [7]). *$X \times \mathbb{I}$ が正規であるためには, X が正規, かつ, 可算パラコンパクトであることが必要十分である.*

正規であるが可算パラコンパクトでない空間を **Dowker 空間**という. 正規空間においては, 可算パラコンパクト性と可算メタコンパクト性は同値であるから, Dowker 空間とは, 正規であるが可算メタコンパクトでない空間のことであるということもできる. Dowker 空間を構成することはかつて難題であったが, しかし, 1971 年に Rudin がついに ZFC での Dowker 空間の例を発見したことはよく知られている.

定理 8 (Rudin [7]). *Dowker 空間は存在する.*

その後, Balogh は Rudin とは別のタイプの Dowker 空間で, より小さい濃度を持ちうるものを構成した.

順序数の有限積の部分空間は常に可算メタコンパクトなので, Dowker 空間ではありえない. しかし, LOTS (あるいは GO 空間) の積はかならずしも可算メタコンパクトではないという事実が今回わかったので, それらの中に Dowker 空間が存在する可能性を直ちに否定することはできないかもしれない.

問題 4. *GO 空間 A, B の積 $A \times B$ で Dowker 空間になるものは存在するか?*

尚, もしそのような例があったとしても, A, B は順序数の部分空間ではありえない.

事実 5. *A が順序数の部分空間で, B が GO 空間ならば, $A \times B$ は Dowker 空間ではない.*

GO-空間は単調正規空間であるが, そこまで広げて考えたとして, Dowker 空間になる積空間はあるだろうか?

問題 5. *単調正規空間 X, Y の積 $X \times Y$ で, Dowker 空間になるものが存在するか?*

参考文献

[1] R. Engelking, *General Topology.* Herdermann Verlag, Berlin (1989).

[2] W. G. Fleissner, *Metacompact subspaces of products of ordinals*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 293-301.

[3] N. Kemoto and K. D. Smith, *The product of two ordinals is hereditarily countably metacompact*, Top. Appl. 74 (1996), 91-96.

[4] N. Kemoto and K. D. Smith, *Hereditary countable metacompactness in finite and infinite product spaces of ordinals*, Top. Appl. 77 (1997), 57-63.

[5] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam (1980).

[6] D. Lutzer, *On generalized ordered spaces*, Dissertationes Math 89 (1971).

[7] M. E. Rudin, *Dowker spaces*, Handbook of Set-theoretic Topology (K. Kunen and J.E. Vaughan, eds), North-Holland, Amsterdam 761–780 (1984).